А. Ю. Долгих

ЗЕНОН И ГИЛЬБЕРТ

(ПРОКЛЯТЬЕ АХИЛЛЕСА)

Гильберт. Приветствую тебя, Зенон.

Зенон. Зенон желает Гильберту радоваться.

Гильберт. Вчера ты изложил мне не лишенное остроумия рассуждение об Ахиллесе и черепахе. В целом я не вижу здесь никакого большого затруднения. Я хорошо помню, что ты говорил. Из ежедневного опыта мы знаем, что тело, которое движется быстрее, догонит тело, которое движется медленнее. А что если бы удалось разумно доказать обратное? Возьмем Ахиллеса, этого самого быстроногого из эллинов, точнее, из ахеев, и черепаху, медлительность которой вошла в поговорки. Они стоят на некотором расстоянии друг от друга, а потом одновременно начинают движение в одном направлении так, чтобы Ахиллес догонял черепаху. Чтобы догнать ее, ему, очевидно, прежде надо преодолеть расстояние, что отделяло его от черепахи изначально. Пока он пробежит его, черепаха успеет сколько-то проползти. Пока он преодолеет новую разницу, она еще сколько-то проползет, и так до бесконечности. И хотя Ахиллес будет постоянно приближаться к ней, он тем не менее никогда ее не достигнет.

Зенон. Все верно.

Гильберт. Злые языки говорят: поскольку уже в твои времена Ахиллеса не было в живых, он действительно не мог (да и теперь не может) настигнуть черепаху. Ибо мертвец не догонит и самую медлительную тварь. Поэтому твое доказательство достоверно. Другие объясняют это тем, что всякий раз, когда Ахиллес уже вот-вот должен поравняться с черепахой, он по крайней недогадливости и неловкости, свойственным всем телесно переразвитым людям, поддает ей сзади; она отлетает вперед, и ему снова приходится ее догонять.

Зенон. А что ты думаешь?

Гильберт. Не знаю, что и сказать. Сойдет в качестве шутки.

Зенон. Хорошо. Такое впечатление создается из-за того, что в ту пору, когда я это придумывал, математика и физика, если не считать достижений моего учителя Парменида, были не слишком развиты; не было, например, даже понятия «скорость». Поэтому для человека твоего времени все это звучит как допотопная басня. Рассмотрим задачу еще раз, но на близком для тебя примере. Пусть начальное расстояние S между Ахиллесом и черепахой будет 10 метров, скорость Ахиллеса *v* (А) — 10 метров в секунду, скорость черепахи *v* (ч) — 1 метр в секунду. Тогда Ахиллес догонит ее за время t:

$$t = \frac{S}{v\,(А) - v\,(ч)} = \frac{10}{(10 - 1)} = \frac{10}{9} = 1{,}(1) \text{ или}$$

1,111... секунды [одна целая и одна в периоде секунды]

Гильберт. И что тебя смущает?

Зенон. Сомнения вызывает последнее число. Разве ты не считаешь, что за время, выраженное этой записью — 1,111… секунды, никто никого догнать не сможет?

Гильберт. С чего ты взял?

Зенон. Допустим, тебе дадут задание: ты должен идти в течение двух секунд. Ты возьмешь хронометр и начнешь движение, считая время. Сначала одна секунда, потом другая. В итоге будет две. Задание выполнено. Теперь тебе дают новое задание: ты должен идти в течение времени, выраженного записью «1,111… с.». Как ты это сделаешь? Во-первых, ясно, что ты не найдешь соответствующего хронометра, т. е. хронометра, который позволял бы отсчитывать промежутки времени до любого знака после запятой. И уже отсюда следует, что задание невыполнимо. Но если даже ты нашел бы такой хронометр, как бы ты с помощью него закончил отсчет времени, чтобы потом уверенно сказать, что ты выполнил задание?

Гильберт. Ты хочешь сказать, что я никогда не закончу счет этого времени?

Зенон. Именно так. Поэтому при данных начальных условиях Ахиллес не догонит черепаху. Хотя при других —

это я признаю — догонит. Например, если черепаха будет ползти быстрее, со скоростью 2 метра в секунду, то Ахиллес догонит ее за 10 / 8 или 1,25 секунды.

Гильберт. А что, кстати говоря, ты сам об этом думаешь? Ведь у тебя сейчас получается, что если черепаха ползет медленнее (1 метр в секунду), Ахиллес ее не догоняет, а если быстрее (2 метра в секунду), то догоняет. Это же просто невероятно!

Зенон. Как раз это меня и устраивает. Ибо я изначально собирался показать, что понятие движения внутренне противоречиво. И на этом примере с числами это очень хорошо видно. Итак, движение противоречиво и, следовательно, невозможно.

Гильберт. Почему ты думаешь, что 1,111... секунды есть бесконечная величина?

Зенон. Потому что такова очевидность. Я просто смотрю и вижу это... А почему ты думаешь, что здесь мы имеем дело с конечной величиной?

Гильберт. Обратимся к твоему примеру. Сохраним те скорости, которые ты придал своему быстроногому предку и этому медлительному животному, но позволим им двигаться в течение двух секунд. За это время Ахиллес пробежит 20 метров, а черепаха — только 2 метра. Следовательно, через две секунды Ахиллес обгонит черепаху на целых девять метров. Чтобы обогнать, надо прежде догнать. Это первое. Второе: число 2 — конечно или бесконечно, как ты думаешь?

Зенон. Несомненно, конечно.

Гильберт. А 1,111... меньше, чем 2. Но очевидно, что если некоторое число меньше некоторого другого конечного числа, то оно и само конечно. Вот, собственно, и все.

Зенон. Если ты так говоришь, значит, ты не вполне усвоил ход моей мысли. Вспомни: я ведь совсем не имел в виду, что Ахиллес не обгонит черепаху; я утверждал лишь, что он ее не догонит. На самом деле твое рассуждение опять говорит в мою пользу: если одно тело обгоняет другое, еще не успев догнать его, это снова означает, что понятие движения, которым мы пользуемся, внутренне противоречиво. Твои доводы в очередной раз отведены. Есть и еще одно обстоятельство. Утверждение, что 1,111... меньше, чем 2, неочевидно. Думаю, ты и сам об этом смутно догадываешься.

Но оно не просто неочевидно, оно неверно. Все дело в том, что 1,111... не принадлежит числовому ряду, поэтому его нельзя количественно сравнивать с числом 2. Так вот, 1,111... вовсе не число, а только числоподобное понятие.

Гильберт. Почему?

Зенон. Потому что у него нет главного признака числа — исчисляемости. Ты знаешь, что любое вычислительное устройство считает числа только в некоторых пределах. Они могут быть шире или уже, но они всегда есть. Вычислитель прекратит деление числа десять на число девять не потому, что дальше некуда делить, а потому что у него стоит некий ограничитель счета. Но даже если ограничение снять, он все равно остановится, потому что память его конечна. Когда она будет переполнена этими знаками после запятой, он застрянет. Если увеличить память, он на некоторое время возобновит деление, а потом все повторится. И у нас никогда не будет уверенности, что конец достигнут. Следовательно, мы не можем вычислить это так называемое число. Не можем вычислить и не можем поэтому использовать его ни в одном вычислении. Но как можно называть числом то, что нельзя ни сосчитать, ни применить в дальнейших расчетах? Поэтому не только так называемые бесконечные непериодические десятичные дроби, вроде π и e, являются иррациональными, т. е. невычислимыми, если перевести это слово с латыни, но и бесконечные периодические. Из этого в частности вытекает, что не всякое отношение чисел есть число.

Гильберт. Что-то в этом, конечно, есть. Но, скорее всего, ты ошибаешься. Ты, например, неявно смешиваешь продолжительность вычисления с величиной вычисляемого. Число, о котором мы тут говорим, ограничено, бесконечна лишь одна из форм его записи; но форму записи, очевидно, не нужно смешивать с числом.

Зенон. Значит, по-твоему, вычислитель считает вовсе не число, а форму записи? Или ты хочешь сказать, что число-то он сразу вычислил, вот только записать его не в состоянии? Не кажется ли тебе это странным?.. И я уже говорил тебе: ты пока не представил доказательств конечности нашего, с позволения сказать, числа. Далее, 10 / 9 с определенной точки зрения вовсе еще не число, а лишь отношение двух чисел — 10 и 9. А 1,(1) — тоже, поскольку, по существу, как и предыдущее, это лишь формула для получения числа. Тогда выходит, что только десятичная форма есть истинная, собственная форма числа.

Гильберт. На первый взгляд это убедительно. Но только на первый. Можно привести пример: 10 : 5 = 2. По обе стороны от знака равенства, очевидно, стоит одно и то же, только это «одно» выражено по-разному. Ведь 10 : 5 и 2 — это совершенно одинаковое количество. Следовательно, не может быть речи о том, что 10 / 9 и 1, (1) суть какие-то неистинные формы записи числа, — они имеют такое же право на существование. Тогда можно сказать, что из-за некой не очень пока ясной случайности число 10 / 9 не имеет конечной десятичной формы записи (тогда как, например, 10 / 5 имеет: это 2). И это в свою очередь означает, что система обыкновенных дробей и система десятичных дробей не вполне… Не вполне что? Как это назвать? Равнозначны? Эквивалентны?.. Не будем пытаться определить это точнее. Они разные, и этого нам на сегодня будет достаточно.

Зенон. Когда мы говорим о разных формах записи, на ум приходит вопрос: формами записи чего они выступают? нельзя ли, наконец, увидеть или услышать само «это» — то, что они выражают?

Гильберт. Не думаю, что это возможно. В лучшем случае все эти формы — зрительные, слуховые — выражают некое понятие в уме. Но умственное нельзя ни увидеть, ни услышать, ни воспринять иными ощущениями: оно только умопостигаемо. Поэтому мы, общаясь чувственно через чувственный мир, можем вообще об этом забыть и считать, что число — это только форма. Форма чего? Ничего. Просто форма. Без чувственного содержания. Можно представить себе двух человек — Сократа и Платона, но только как людей, а не как нечто двойственное. В чувственно воспринимаемом мире нет ни единицы самой по себе, ни двойки самой по себе, ни тройки, ни какого-либо другого числа. Ты можешь также представить разные языки, например, эллинский и немецкий. Казалось бы одна и та же мысль звучит на них совершенно по-разному. Но это тебя не удивляет. Почему же ты не хочешь считать, что десятичная форма записи и обыкновенная форма записи суть два разных языка? Далее, возьмем нечто, заведомо являющееся числом, например 1. Оно конечно, но мы сможем разложить его в бесконечный ряд чисел. Очевидно, что от этого число не станет бесконечным.

Зенон. Звучит красиво, но не убедительно. Если число — это только форма, то наличие бесконечных форм тождественно наличию бесконечных чисел. И тогда Ахиллес в нашем примере действительно не догоняет черепаху, если считать в десятичных дробях; а если в обыкновенных — то догоняет. Но именно это я и хотел доказать: понятие движения противоречиво, и поэтому из него можно вывести противоположные утверждения. Если же ты скажешь, что все эти три формы выражают одно и то же понятие в уме, то я не поверю: как нечто одно может иметь настолько разные выражения? А что они разные, это я считаю очевидным. Они не могут быть одинаково правильными, и в таком случае вопрос о том, какое из них ближе к истине остается. Но главное в другом. Обращая мысленный взор внутрь ума, я нигде не нахожу в нем никакого понятия числа, отличного от 10 / 9, 1,(1), 1,111... и тому подобных. Я знаю α, I, 1, «εἷς», «one», «ein», «один» и т. п., но не знаю никакого умопостигаемого числа, выражением которого эти зрительные и слуховые знаки якобы являются. Зачем же тогда предполагать его существование? На каких основаниях? Таким образом, мы возвращаемся к утверждению о том, что запись числа или его звуковое выражение и есть само число, а не выражение. Твой пример с языками тоже неудачен, поскольку между высказываниями из разных языков зачастую нет однозначного соответствия. Это находит свое выражение в наличии нескольких переводов одного и того же произведения. Но разве можно допустить такое в арифметике? И если мы разложим число в бесконечный ряд, то оно останется числом, т. е. чем-то конечным. Но в нашем случае мы ничего не разлагали, а только вычисляли. Поэтому нам и надо установить, конечно 1,111... или бесконечно.

Гильберт. Когда ты говоришь, что 1,111... бесконечно, это означает, что ты уже как бы вычислил его до конца. Но ты сам сказал, что вычислить его невозможно. В самом деле, откуда ты знаешь, какой знак там будет стоять на стомиллионном месте после запятой?

Зенон. Согласен. Но это ничего тебе не даст. Ведь в таком случае оказывается, что мы не знаем, когда Ахиллес догонит черепаху, и не знаем, догонит ли он ее вообще! Это для данных начальных условий невычислимо.

Гильберт. Вот именно. Значит, надо обратиться к опыту. Ну что, заставим Ахиллеса и черепаху побегать наперегонки?

Зенон. А где ты возьмешь того Ахиллеса, которого я имел в виду?

Гильберт. Ну, это мы уже слышали, друг мой. Заменим Ахиллеса на другого человека.

Зенон. Что мы не найдем Ахиллеса — это, конечно, уловка с моей стороны. Но и ты мог быть более внимательным. Речь идет о том, что можно назвать рассогласованием ума и ощущений: я вижу одно, а доказываю другое, прямо противоположное, причем убедительно. А ты предлагаешь опыт проверять опытом.

Гильберт. А ты со своей стороны сталкиваешь чистую математику с эмпирической физикой. И естественно, что ничего вразумительного не получаешь. Где ты видел, чтобы тела в нашем мире срывались с места сразу со скоростями 10 и 1 метр в секунду, а потом строго выдерживали их без малейшего отклонения величины на протяжении всего пути движения? Так просто не бывает. Поэтому твои математические условия в строгом смысле не отражают ничего физического. Но можно не сомневаться, что при условиях примерно совпадающих с предложенными тобой, Ахиллес догонит черепаху, например, за 1,1 секунды. Или за 1,11 секунды. Или за 1,111; за 1,112. И тому подобное... Впрочем, я готов признать, что окончательно не могу одолеть тебя. Но это только на сегодня! Я не собираюсь полностью сдаваться. Ибо, как говорил наш общий друг Аристотель, где-то всегда необходимо остановиться. Это происходит из-за недостатка времени для обдумывания, а не потому, что доводы закончились навсегда. Точка, которую мы ставим сейчас, не последняя в этом деле. И я не сомневаюсь, что к завтрашней встрече найду несколько новых и весомых возражений... Все-таки странно, что ты одержал временную победу там, где я считал себя особенно сильным — на полях математики. Видимо, это следствие того, что мы с тобой как бы поменялись местами. И вообще, мы — это не мы... Но ручаюсь, что я одержу верх в диалектике, родоначальником которой ты давно прослыл. Так вот, в своих рассуждениях о движении ты неизменно создаешь бесконечное деление либо пространства, либо времени, либо того и другого. В случае с Ахиллесом и черепахой важнее время, ведь ты утверждаешь, что он никогда не настигнет ее. Такой вывод ты делаешь исключительно на основании бесконечного деления. Следовательно, ты исходишь из предпосылки, согласно которой если нечто делится до бесконечности, значит, оно само изначально было бесконечным. Но это неочевидно, и ты этого нигде не доказываешь. В своей апории ты так хитроумно спрятал это исходное положение, что я даже не уверен, заметил ли ты его сам. Между тем, все упирается именно в это. Я уже говорил тебе: возьми нечто заведомо ограниченное — любую вещь или время; и если, допустим, тебе каким-то образом удастся разделить это на бесконечное число частей, разве станет от этого куча частей бесконечной по размеру или длительности? Но ты безосновательно утверждаешь именно это. Нисколько не пытаясь рассчитать время, которое может затратить Ахиллес на то, чтобы догнать животное, ты из чисто умственного бесконечного деления его делаешь вывод о том, что оно бесконечно. Насколько я понимаю, в этом-то и состоит изначальная бездоказательность твоего доказательства.

Долгих Андрей Юрьевич

ЗЕНОН И ГИЛЬБЕРТ
(Проклятье Ахиллеса)

Диалог

Верстка А. Долгих

Последнее изменение 11.12.2012.
Гарнитура Academy. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 0,625. Уч.-изд. л. 0,38.